

Alpha 稳定分布噪声环境下类 M 估计相关的 DOA 估计新算法

张金凤^{1,2}, 邱天爽¹, 宋爱民¹, 唐洪¹, 王娜²

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024; 2. 深圳大学 深圳市现代通信与信息处理重点实验室, 广东 深圳 518060)

摘 要: 提出了一类适用于 Alpha 稳定分布随机变量的统计量—类 M 估计相关 (MELC), 通过构造阵列输出的类 M 估计相关矩阵, 提出了适用于 Alpha 稳定分布噪声环境下的波达方向 (DOA) 估计新算法, 即 MELC-MUSIC 算法。仿真实验表明, 在 Alpha 稳定分布噪声环境下, MELC-MUSIC 算法在抗噪声特性、多源信号分辨性以及针对不同形式信号 (圆对称信号或非圆对称信号) 的适应性方面获得比基于分数低阶统计量 (FLOS) 的 MUSIC 方法更好的估计性能。

关键词: M 估计; 波达方向估计; 分数低阶统计量; MUSIC 算法

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)05-0071-08

M-estimate like correlation based algorithm for direction of arrival estimation under alpha-stable environments

ZHANG Jin-feng^{1,2}, QIU Tian-shuang¹, SONG Ai-min¹, TANG Hong¹, WANG Na²

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Shenzhen Key Lab of Advanced Communications and Information Processing, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: A novel class of bounded statistics, namely, the M-estimate like correlation (MELC) for independently identical distributed symmetric alpha-stable ($S\alpha S$) random variables was defined. Based on the MELC matrix for the array sensor outputs, a new algorithm for direction of arrival (DOA) estimation in the presence of complex $S\alpha S$ noise was proposed. The comprehensive Monte-Carlo simulation results show that the MELC-MUSIC algorithm not only outperforms the fractional lower order statistics (FLOS) based MUSIC algorithms under low SNR conditions and multi-source signals environment, but also is robust with circular and noncircular signals.

Key words: M-estimate; direction of arrival estimation; fractional lower order statistics; MUSIC algorithm

1 引言

基于子空间划分的 MUSIC 算法是应用于信号波达方向估计的经典算法^[1]。近年来的研究表明, 在无线电监测与移动通信等无线被动定位环境中, 所遇到的信号和噪声很多是非高斯分布的^[2], 这种信号噪声的非高斯分布使得传统的基于高斯假定和相应的二阶统计量 (SOS) 理论的 MUSIC 算法性能显著退化。研究发现, 在无线信道中, 由于自然因素 (如大气噪声、磁暴等) 和人为因素 (如电动机、各种电磁设备等) 的影响, 信号噪声实测数

据中往往伴随着较强的脉冲性干扰, 其概率分布显著偏离高斯分布, 且比高斯分布具有更厚重的拖尾。在信号处理理论中, 常把这类非高斯噪声用 Alpha 稳定分布来描述^[2]。

对称 Alpha 稳定分布可以由其特征函数 $\varphi(\omega) = \exp(j\alpha\omega - \gamma|\omega|^\alpha)$ 来表征, 其中, α 为特征指数, 满足 $0 < \alpha \leq 2$ 。高斯分布即为稳定分布 $\alpha = 2$ 时的特殊情形。 $0 < \alpha < 2$ 时, Alpha 稳定分布, 随机变量的 p 阶矩仅当 $p < \alpha$ 时存在, 称为分数低阶 Alpha (FLOA) 稳定分布。这样, 所有的 FLOA 分布均没有有限的二阶矩, 而当 $\alpha \leq 1$ 时, FLOA 分布甚至

收稿日期: 2012-05-25; 修回日期: 2012-12-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61172108, 61139001, 60902069)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61172108, 61139001, 60902069)

没有有限的一阶矩。因此，在 DOA 估计问题中，如果仍然使用基于 SOS 的方法对上述信号进行参数分析和估计，就会由于算法性能退化而不能得到准确的定位结果。

基于分数低阶统计量 (FLOS) 理论^[2]，文献[3]提出了基于共变的 ROC-MUSIC 算法。文献[4]在文献[3]的基础上，定义了阵列信号的分数低阶矩 (FLOM)，提出了 FLOM-MUSIC 算法。文献[5]定义了阵列信号的分数低阶相位矩 (PFLOM)，提出了 PFLOM-MUSIC 算法。文献[3~5]充分验证了稳定分布噪声环境下，3 种基于 FLOS 理论的 MUSIC 算法相对于基本 MUSIC 算法具有明显的性能改善。然而，此类基于 FLOS 的算法仍具有其局限性。首先，分数低阶矩的阶数 p 的确定依赖于对信号噪声 α 值的先验知识。在实际应用中，这种先验知识往往难于获取，只能根据接收信号进行估计，从而可能影响 DOA 估计算法的性能。其次，文献[4]通过仿真实验说明此类基于 FLOS 理论的 DOA 估计算法只适用于圆对称信号^[4]，对于不具备圆对称特性的信号 (如 BPSK 信号)，算法将发生显著的性能退化。

此外，文献[6]提出可以对阵列输出信号中冲激性显著的点进行置 0 (trim)，并对作用后信号进行 Shapiro-Wilk 检验，直至其满足高斯分布，再对处理后的阵列输出应用 MUSIC 算法实现 DOA 估计。此类算法的局限性在于：1) 对于冲激特征出现频率多的信号置零点过多，从而无法体现原阵列输出的特征，导致算法估计性能退化。2) 算法需要置零一检验，再置零一再检验的前期处理过程，使算法的计算量显著增加，从而影响算法的实时处理。

受 M 估计思路启发，本文定义了一类新的统计量，称为类 M 估计相关 (MELC)，在此基础上，提出了基于类 M 估计相关的稳定分布噪声环境下 DOA 估计新算法，简称为 MELC-MUSIC 算法。仿真实验表明，MELC-MUSIC 算法不依赖于信号噪声 α 值的先验知识，在抗噪声特性、多源信号分辨性以及对不同形式信号 (圆对称信号或非圆对称信号) 的适应性方面获得比基于 FLOS 的 MUSIC 方法更好的估计性能。

2 M 估计相关

文献[7]中提出了 M 估计相关的概念。考察系统辨识问题，输入信号 $x(n)$ 经过系统后得到输出，估

计误差为 $e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)$ ，其中， $d(n)$ 为参考信号， $\mathbf{w}(n)$ 和 $\mathbf{x}(n)$ 分别为滤波器权值矢量和输入信号矢量。则基于 M 估计的代价函数可以表示为

$$J_{M_p}^{\text{dif}} = E[\rho(e(n))] \quad (1)$$

其中， $\rho(\cdot)$ 为 M 估计函数。常见的 M 估计函数有 Huber 函数、修正 Huber 函数和 Hampel 分段函数等^[7,8]。对式 (1) 所示的代价函数利用最速下降法，有

$$E[\varphi(e(n))\mathbf{x}(n)] = 0 \quad (2)$$

其中， $\varphi(e(n)) \stackrel{\text{dif}}{=} \partial \rho(e(n)) / \partial e$ 。为便于表达，定义 $q(e(n)) \stackrel{\text{dif}}{=} \varphi(e)/e$ ，将估计误差 $e(n)$ 代入式(2)，可以得到如下 M 估计正则方程。

$$\mathbf{R}_{x_p} \mathbf{w} = \mathbf{P}_\rho \quad (3)$$

其中， $\mathbf{R}_{x_p} \stackrel{\text{dif}}{=} E[q(e(n))\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$ 、 $\mathbf{P}_\rho \stackrel{\text{dif}}{=} E[q(e(n)) \cdot d(n)\mathbf{x}(n)]$ 分别为 M 估计自相关矩阵和 M 估计互相关矢量^[7]。两者作用类似于传统的维纳滤波器中的自相关矩阵和互相关矢量。文献[7,8]表明，利用 Hampel 分段函数作为 M 估计函数，在混合高斯噪声和稳定分布噪声环境下可以得到良好的系统辨识性能。但是，基于 M 估计代价函数仍有其局限性，主要体现为：1) 在稳定分布噪声环境下，M 估计相关矩阵 \mathbf{R}_{x_p} 及 \mathbf{P}_ρ 的存在性尚未得到理论证明。2) 现有文献并未给出 M 估计函数 $\rho(\cdot)$ 的选取原则和方法。

受 M 估计相关矩阵的启发，本文采用指数函数 $\exp\left(-\frac{|e(n)|}{\sigma}\right)$ 作为非线性函数 $q(e(n))$ ，并提出了一类适用于稳定分布随机变量的统计量，称为类 M 估计相关，并在理论上证明了该统计量的存在性和有界性。

定义 1 设 X 和 Y 为独立同分布的 SaS 随机变量，其特征指数满足 $1 < \alpha \leq 2$ ，则利用指数函数作为非线性函数时，随机变量 X ， Y 的类 M 估计互相关定义为^[7]

$$R = E\left[\exp\left(-\frac{|X-Y|}{\sigma}\right)XY\right] \quad (4)$$

其中， σ 为尺度参数。该统计量的有界性证明见附录。

联合考察 M 估计互相关 R_{Xp} 和类 M 估计互相关 R 可以看出, 2 种统计量均采用非线性函数 (M 估计函数和指数函数 $\exp\left(-\frac{|e|}{\sigma}\right)$) 作用于估计误差以实现脉冲噪声的抑制作用。图 1 显示了分别采用 Hampel 分段函数及指数函数函数作为 M 估计相关中对应的非线性函数 $q(e(n))$ 的图形对比。在图 1 中, Hampel 分段函数的 3 个阈值参数分别取值为 $\xi=1$, $\Delta_1=4$ 及 $\Delta_2=16$ (关于阈值 ξ, Δ_1, Δ_2 的定义可参考文献[7]), 而指数函数取尺度参数 $\sigma=2$ 。从图 1 中可以看出, 指数函数具有与 Hampel 分段函数类似的非线性作用, 且无需分段, 避免了 Hampel 函数中 3 个阈值选取的问题。图 2 考察了类 M 估计互相关作用于稳定分布信号时的时域波形。其中, 稳定分布信号特征指数取值为 $\alpha=1.3$ 。可以看出, 随着采样点数的增加, 稳定分布信号的冲激特征愈加明显。如图 2(b)所示, 通过指数函数作用类 M 估计互相关能够充分抑制稳定分布信号中的冲激特征。

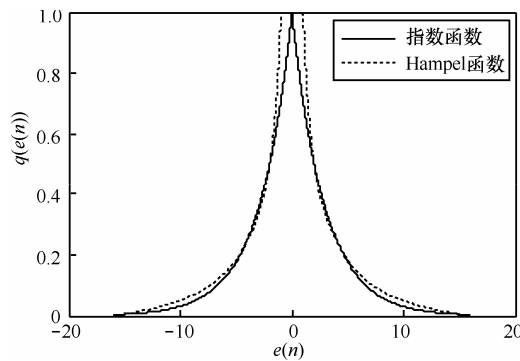
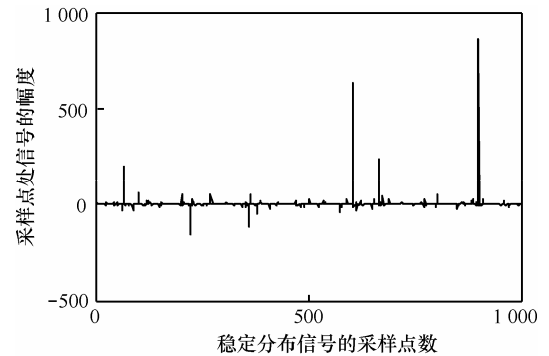


图 1 Hampel 分段函数和指数函数分别作为非线性函数 $q(e(n))$ 时的对比

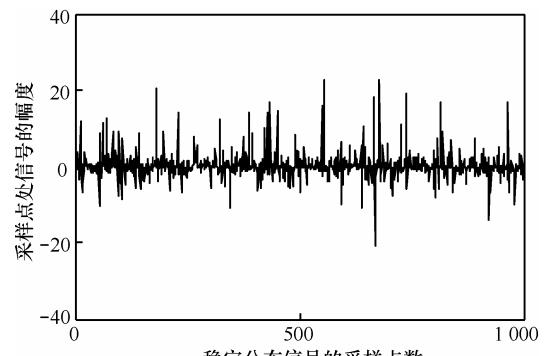
式 (4) 仅定义了随机变量 X, Y 的类 M 估计互相关, 而对于 $X=Y$, 根据分数低阶稳定分布不存在有限的二阶统计量这一特点可知, 式 (4) 无界。进一步地, 观察式 (4) 及图 2 可知, 式 (4) 中的指数函数 $\exp\left(-\frac{|X-Y|}{\sigma}\right)$ 作用于随机变量 X 及 Y , 并能够抑制其中的冲激特征。受稳定分布中的共变^[3]对随机变量 X 及 Y 中的冲激特征采取不同抑制程度的启发, 可以进一步将式 (4) 扩展, 得到 X 和 Y 为联合稳定分布随机变量, 类 M 估计相关的一般形式可表示为

$$R_{\text{MELC}} = E \left[\exp \left(-\frac{|\mu_1 X - \mu_2 Y|}{\sigma} \right) XY \right], \mu_1 \neq \mu_2 \quad (5)$$

其中, μ_1, μ_2 使得当 $X=Y$ 时, 式 (5) 仍然有界 (其有界性证明类似于式 (4) 的证明, 本文从略)。因此, 区别于式 (4), 将式 (5) 称为随机变量 X 和 Y 的类 M 估计相关。



(a) 原信号



(b) 作用后信号

图 2 类 M 估计互相关作用于稳定分布信号时的情形

3 基于 MELC 的 DOA 估计新算法

3.1 问题描述

设均匀线性阵列天线的阵元数为 M , 相互独立的窄带信源数为 P , 来波方向角为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$, 则阵列输出信号可表示为

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^P a(\theta_k) s_k(t) + n_m(t), m=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

其中, $a(\theta_k) = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d\sin(\theta_k)}$ 为第 m 个阵元指向 θ_k 方向的方向系数, λ 为载波波长, d 为相邻两阵元的间隔, $s_k(t)$ 为阵元上接收的第 k 个纯净信号, $n_m(t)$ 表示接收信号 $x_m(t)$ 中的加性稳定分布噪声, 信号和噪声满足独立性假定。DOA 估计算法的关键即是从阵列输出信号中估计方向角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 。

3.2 MELC-MUSIC 算法

基于类 M 估计相关, 本文构造了 $M \times M$ 维阵

列输出信号矩阵 $C_{M \times M}$ ，其 i 行 j 列元素 C_{ij} 表示为

$$C_{ij} = E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i(t) - \mu_2 x_j^*(t)|}{\sigma} \right) x_i(t) x_j^*(t) \right\}, \mu_1 \neq \mu_2 \quad (7)$$

其中， x_i 和 x_j 分别表示接收信号矢量的第 i 个和第 j 个信号。

定理 1 矩阵 $C_{M \times M}$ 中任意元素 C_{ij} 均为有界。

证明 假定阵元输出信号为实信号。将 $x_i(t)$ 和 $x_j(t)$ 利用式(6)描述后代入式(7)，有

$$C_{ij} = E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) [(w_i(t) + n_i(t))(w_j(t) + n_j(t))] \right\} \quad (8)$$

由信号与噪声之间的独立性假定，将式(8)展开可得

$$C_{ij} = E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) w_i(t) w_j(t) \right\} + E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) n_i(t) n_j(t) \right\} \quad (9)$$

将指数函数性质应用于式(9)的第一项有

$$\begin{aligned} & E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) w_i(t) w_j(t) \right\} \\ & \leq E[|w_i(t) w_j(t)|] \\ & = E \left[\left\| \sum_{k=1}^P A_{ik} s_k(t) \right\| \left\| \sum_{k=1}^P A_{jk} s_k(t) \right\| \right] < \infty \end{aligned} \quad (10)$$

其中，式(10)利用了信号具有有限功率的假定。同时，式(9)中的第二项记为

$$E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 w_i(t) - \mu_2 w_j(t) + \mu_1 n_i(t) - \mu_2 n_j(t)|}{\sigma} \right) n_i(t) n_j(t) \right\} \quad (11)$$

总能找到正数 $\xi \rightarrow 0$ ，使得

$$\begin{aligned} & |\mu_1 w_i(t) - \mu_2 w_j(t) + \mu_1 n_i(t) - \mu_2 n_j(t)| \\ & > \xi |\mu_1 n_i(t) - \mu_2 n_j(t)| \end{aligned} \quad (12)$$

成立，因此有

$$\begin{aligned} & E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) n_i(t) n_j(t) \right\} \\ & \leq E \left\{ \exp \left(-\frac{|\mu_1 n_i(t) - \mu_2 n_j(t)|}{\sigma / \xi} \right) n_i(t) n_j(t) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

利用定义 1 的结论可知，式(13)有界。将式(10)

与式(13)结合在一起，可以证明矩阵元素 C_{ij} 有界。

证毕。

定理 2 $C = A \Lambda A + kI$ ，即矩阵 $C_{M \times M}$ 可以分解为信号子空间和噪声子空间。

证明 由式(7)可得

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \sum_{k=1}^P A_k E \left\{ s_k(t) \left(\sum_{r=1}^P A_{jr} s_r(t) + n_j(t) \right) \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) \right\} + \\ & E \left\{ n_i(t) \left(\sum_{r=1}^P A_{jr} s_r(t) + n_j(t) \right) \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

观察式(14)中的第二项，对 $\exp(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma})$

函数利进行 Taylor 级数展开，并利用信号噪声之间的独立性假定，有

$$\begin{aligned} & E \left\{ n_i(t) \left(\sum_{r=1}^P A_{jr} s_r(t) + n_j(t) \right) \exp \left(-\frac{|\mu_1 x_i - \mu_2 x_j|}{\sigma} \right) \right\} \\ &= E \left\{ n_i(t) n_j(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \sigma^k} |\mu_1 n_i(t) - \mu_2 n_j(t)|^k \right\} \\ & \stackrel{\text{dif}}{=} H_{i,j} \end{aligned} \quad (15)$$

可以看出，式(15)仅为关于 $n_i(t)$ 和 $n_j(t)$ 的函数，由于各路噪声 $\{n_i(t)\}_{i=1}^M$ 之间是相互独立的，因此对于任意 $i \neq j$ ， $H_{i,j}$ 恒等于 0。当且仅当 $i = j$ 时，式(15)不等于 0 且对不同的 $i = j = 1, 2, \dots, M$ 均相等，若令 $H_{i,i} = k$ ，则式(15)可记为 $k\delta_{ij}$ 。

类此地，式(14)中第一项可以描述为仅关于 $s_k(t)$ 和 A_{kj} 的函数。这样，式(14)可以简化为

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^P A_{ik} \Lambda_{kk} A_{jk}^* + k\delta_{ij} \quad (16)$$

其矩阵形式为 $C = A \Lambda A + kI$ 。证毕。

定理 1 和定理 2 说明，基于 MELC 的 $M \times M$ 维矩阵 $C_{M \times M}$ 作用类似于 MUSIC 算法中的协方差矩阵，从而可以利用奇异值分解将该矩阵分解为信号子空间和噪声子空间，通过构造 MELC-MUSIC 谱实现对 DOA 的估计。

3.3 MELC-MUSIC 算法实现步骤

Step1 以时间平均替代统计平均，依据式(7)计算 N 点数据的 \hat{C}_{ij} 估计值。构造矩阵 $\hat{C}_{M \times M}$ 。参数 μ_1 、 μ_2 和 σ 的选取结合后续仿真实验说明。

Step2 对 $\hat{C}_{M \times M}$ 做奇异值分解 (SVD)，构造

$M \times (M - P)$ 矩阵 $\hat{E}_n^{\text{dif}} = [\hat{e}_{p+1}, \hat{e}_{p+2}, \dots, \hat{e}_M]$, 其中, $\hat{e}_{p+1}, \hat{e}_{p+2}, \dots, \hat{e}_M$ 为对应于矩阵 $\hat{C}_{M \times M}$ 的 $M - P$ 个最小的左奇异矢量。

Step3 按照式(17)计算 MELC-MUSIC 谱(E_n 以其估计值 \hat{E}_n 替代):

$$P_{\text{MELC-MUSIC}}(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\varphi) \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{a}(\varphi)}, -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \quad (17)$$

其中, $\mathbf{a}^H(\varphi) = [1 \ e^{-j2\pi(d/\lambda)\sin\varphi} \dots e^{-j2\pi((M-1)d/\lambda)\sin\varphi}]^T$ 为 $M \times 1$ 维线性阵列方向矢量。

Step4 选择 $P_{\text{MELC-MUSIC}}(\varphi)$ 中的 P 个局部峰值 $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_P$ 作为 DOA 估计值。

4 计算机仿真

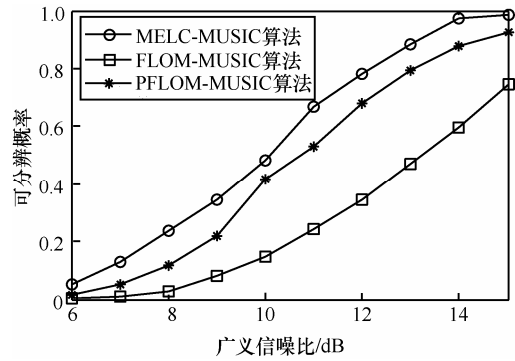
仿真中, 采用 2 个具有相同功率的独立 4-QAM 信号作为接收信号, 信源的方向角分别为 $\theta_1 = 10^\circ$ 和 $\theta_2 = 20^\circ$ 。接收阵元数 $M = 5$, 各阵元间隔 $d = \lambda/2$ 。加性噪声服从 SaS 分布。每个仿真均独立进行 1 000 次蒙特卡罗实验。考虑到 SaS 分布噪声不具有有限功率, 采用广义信噪 GSNR^[2]对信号噪声进行设置, 采用可分辨概率和均方误差^[3]来评价 MELC-MUSIC 算法的 DOA 估计性能。

本文设置了 5 个仿真实验考察 MELC-MUSIC 算法和基于 FLOS 理论的 MUSIC 算法的性能对比, 如实验 1~实验 5 所示。考虑到 ROC-MUSIC 算法与 FLOM-MUSIC 算法估计性能相当^[4], 本文仅对 FLOM-MUSIC 算法和 PFLOM-MUSIC 算法进行仿真。MELC-MUSIC 算法中参数 μ_1 、 μ_2 和 σ 的选取在仿真实验 6 中进行详细讨论。参考实验 6 中的仿真结果, 实验 1 至实验 5 中 MELC-MUSIC 算法的参数选取均为 $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 1$, $\sigma = 4$ 。

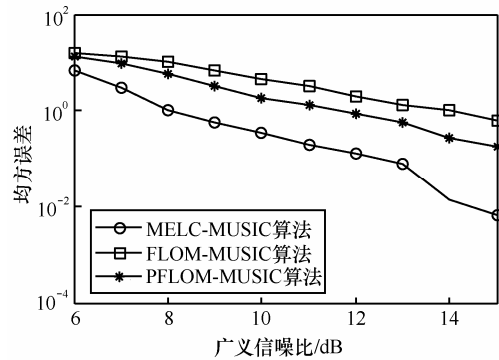
实验 1 信噪比的影响。采用 $\alpha = 1.6$ 的 SaS 噪声, 信号快拍次数为 1 000 次, 广义信噪比 (GSNR) 为 6~15dB。对于 FLOM-MUSIC 算法和 PFLOM-MUSIC 算法而言, 设定 $p = 1$ ^[3,4]。图 3 给出了实验仿真的结果。从图 3 中可以看出, MELC-MUSIC 算法无论在可分辨概率还是在均方误差上均取得比基于 FLOS 理论的 2 种算法更好的估计性能。

实验 2 特征指数 α 的影响。本次实验中, 加性噪声 α 值设定为 1.1~1.8, 对应于从脉冲性较强到脉冲性较弱的噪声环境变化。快拍次数为 1 000 次, $\text{GSNR} = 15\text{dB}$ 。仿真结果如图 4 所示。显然, 在噪声脉冲性较强时的情形 ($\alpha = 1.1$), MELC-MUSIC 算

法的估计性能明显优于 FLOM-MUSIC 算法和 PFLOM-MUSIC 算法。

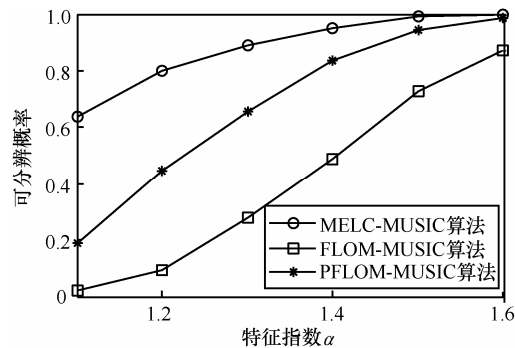


(a) 可分辨概率

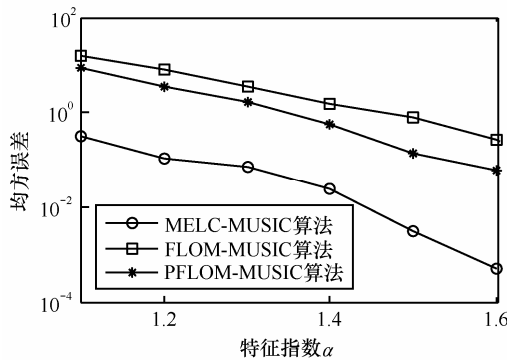


(b) 均方误差

图 3 SaS 噪声下算法性能随广义信噪比的变化



(a) 可分辨概率



(b) 均方误差

图 4 SaS 噪声下算法性能随 α 值的变化

实验 3 快拍数的影响。本次实验中，加性噪声 α 值设定为 1.6, $GSNR=15\text{dB}$ 。实验仿真了 3 种算法对快拍次数从 50~500 次变化时算法的估计性能。图 5 给出了仿真结果。由图 5 可以看出，当取得阵列输出数据的快拍次数较少时，MELC-MUSIC 算法仍能获得比 FLOM-MUSIC 算法和 PFLM-MUSIC 算法更好的估计性能。

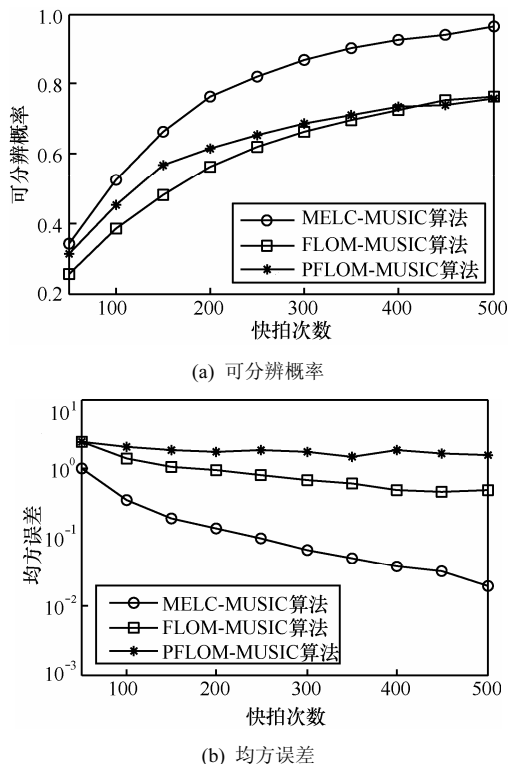


图 5 SaS 噪声下算法性能随快拍数的变化

实验 4 多信号分辨性能。本次实验考察当两源信号的入射角分离程度从 1°~10° 变化时，3 种算法的估计性能。加性噪声 α 值设定为 1.5, $GSNR=20\text{dB}$, 快拍次数为 1000 次。仿真结果如图 6 所示。可以看出，当入射角分离程度小于 6° 时，FLOM-MUSIC 算法和 PFLM-MUSIC 算法在 1000 次蒙特卡罗实验中几乎均不能分辨两入射源信号。与之对比，MELC-MUSIC 算法在入射角分离程度为 5° 时已能达到 0.506 的可分辨概率。

实验 5 算法对不同信号形式信号的估计性能对比。本次实验中，设定 $GSNR=15\text{dB}$, $\alpha=1.1\sim 1.8$, 快拍次数为 1000 次。分别考察 3 种算法对包括 QPSK 信号、BPSK 信号、4-QAM 信号、圆对称 GAUSS 信号在内的 4 种信号的估计性能。仿真结果如图 7 所示。可以看出，FLOM-MUSIC 算法及 PFLM-MUSIC

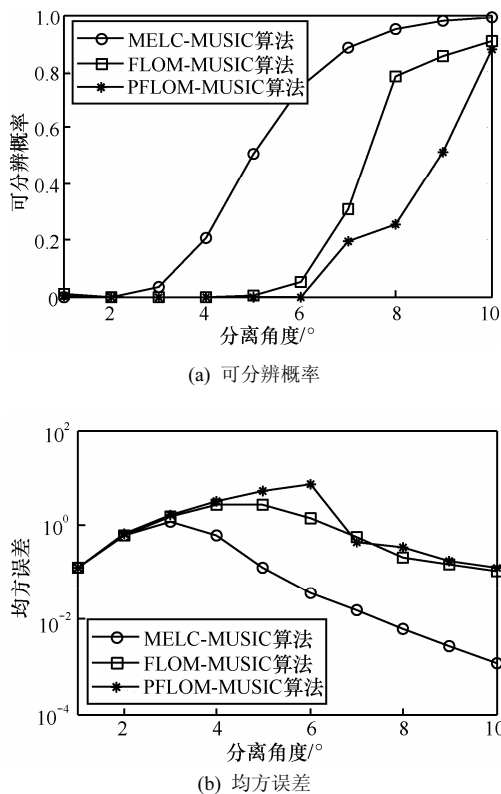


图 6 SaS 噪声下算法分辨 2 个源信号的性能

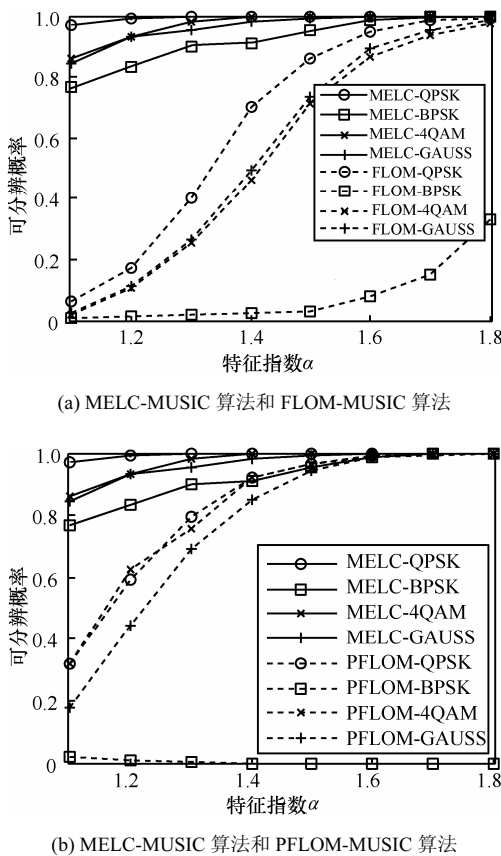


图 7 4 种信号形式下算法的性能对比

算法对圆对称信号 (QPSK 信号、QAM 信号和圆对称 GAUSS 信号) 估计性能相当, 对不具备圆对称性质的信号 (BPSK 信号) 估计性能明显退化。而 MELC-MUSIC 算法对 4 种信号均表现出良好的估计性能, 体现了算法适应于不同信号形式的顽健性。

实验 6 MELC-MUSIC 算法的参数选择。前文仿真实验表明, 参数 μ_1 、 μ_2 应联合选取。本次实验中固定尺度参数 $\sigma = 4$, 考察加性噪声 $\alpha = 1.1 \sim 1.4$, $GSNR = 15\text{dB}$, 阵列输出快拍次数为 1 000 时, 参数 μ_2 / μ_1 在区间 [1, 20] 内变化对算法性能的影响。仿真结果如图 8 所示。可以看出, μ_2 / μ_1 值取为区间 [2, 4] (即若取 $\mu_2 = 1.0$, $\mu_1 \in [0.25, 0.5]$) 内, 算法可以得到较高的可分辨概率。另设定 $GSNR = 15\text{dB}$, μ_1 和 μ_2 参数分别为 0.25 和 1.0, 加性噪声 $\alpha = 1.1 \sim 1.4$, 阵列输出快拍次数为 1 000 时测试尺度参数 σ 对算法性能的影响, 仿真结果如图 9 所示。可以看出, 若使算法获得较高的可分辨概率, σ 的选取范围为 [2, 4]。

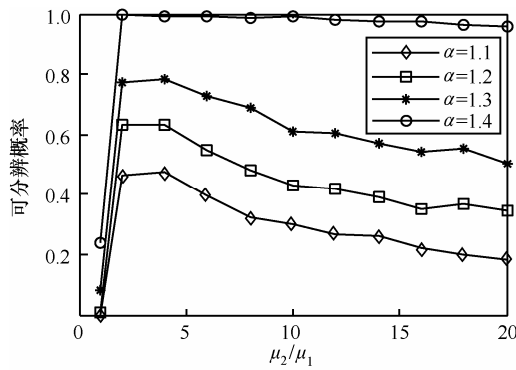


图 8 参数 μ_1 、 μ_2 对算法性能的影响

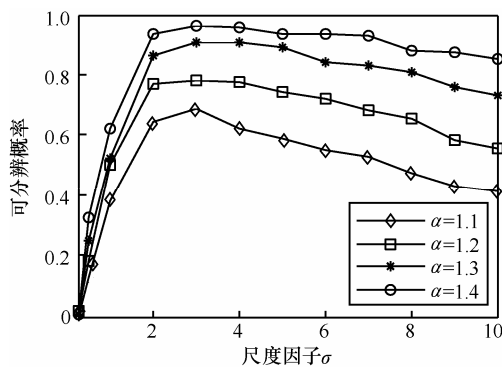


图 9 尺度参数 σ 对算法性能的影响

5 结束语

借鉴 M 估计相关的思路, 本文提出了一类适用

于稳定分布随机变量的统计量—类 M 估计相关, 构造了阵列输出的类 M 估计相关矩阵, 并且证明该矩阵应用于 DOA 估计问题时可以划分为信号子空间和噪声子空间, 在此基础上, 提出了适用于稳定分布噪声环境下的 DOA 估计新算法—MELC-MUSIC 算法。与 FLOM-MUSIC 算法和 PFLOM-MUSIC 算法的对比实验表明, MELC-MUSIC 算法在抗噪声特性、多信号分辨性、对不同信号形式的适应性等技术指标上具有更强的顽健性。

附录 定义 1 中统计量的有界性证明

考察 $R^1 = -R = E \left[\exp \left(-\frac{|X-Y|}{\sigma} \right) (-XY) \right]$, 有

$$R^1 \leq \frac{1}{2} E \left[\exp \left(-\frac{|X-Y|}{\sigma} \right) (X-Y)^2 \right] \quad (18)$$

由文献[2]可知, 对于两独立同分布的 SaS 随机变量 X, Y , 其特征指数为 α , 则存在 2 个任意常数 b_1, b_2 使得随机变量 X, Y 的任意线性组合 $b_1X + b_2Y$ 仍满足特征指数为 α 的稳定分布。因此, 若令 $X - Y \stackrel{d}{=} Z$, 则 Z 具有与 X, Y 相同的分布。这样

$$\begin{aligned} 2R^1 &= E \left[\exp \left(-\frac{|X-Y|}{\sigma} \right) (X-Y)^2 \right] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} E \left[\exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) Z^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|z|}{\sigma} \right) z^2 f(z) dz \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-j\omega z} d\omega$ 为随机变量 Z 的概率密度函数, $\varphi(\omega) = e^{-j\omega a - \gamma|\omega|^\alpha}$ 为随机变量 Z 的特征函数。本文中为简化证明, 可假定稳定分布的位置参数 $a = 0$ 。这样, 式 (19) 可以表示为

$$\begin{aligned} &E \left[\exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) Z^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|z|}{\sigma} \right) z^2 e^{-j\omega z} \exp(-\gamma|\omega|^\alpha) dz d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|z|}{\sigma} \right) z^2 \exp(-\gamma|\omega|^\alpha) \cos \omega z dz d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|z|}{\sigma} \right) z^2 \exp(-\gamma|\omega|^\alpha) (-j \sin \omega z) dz d\omega \end{aligned} \quad (20)$$

观察式 (20) 中的第二项二重积分, 由于外重积分中的被积函数 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|z|}{\sigma} \right) z^2 \exp(-\gamma|\omega|^\alpha) (-j \sin \omega z) dz$ 为关于变量 ω 的奇函数, 因此积分式积分为 0。从而

$$\begin{aligned}
 & E \left[\exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) Z^2 \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) z^2 \cos \omega z dz \exp(-\gamma \omega^\alpha) d\omega \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) z^2 dz \exp(-\gamma \omega^\alpha) d\omega \quad (21)
 \end{aligned}$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) z^2 dz = 2 \int_0^{+\infty} \exp \left(-\frac{z}{\sigma} \right) z^2 dz = 4\sigma^3$ ，因此

式(19)有

$$\begin{aligned}
 E \left[\exp \left(-\frac{|Z|}{\sigma} \right) Z^2 \right] &\leq \frac{4\sigma^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma \omega^\alpha) d\omega \\
 &\leq \frac{4\sigma^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma \omega) d\omega = \frac{4\sigma^3}{\pi\gamma} \quad (22)
 \end{aligned}$$

式(22)说明 $2R^1 \leq \frac{4\sigma^3}{\pi\gamma}$ ，即 $R \geq -\frac{2\sigma^3}{\pi\gamma}$ 。

同时，考察 $R = E \left[\exp \left(-\frac{|X-Y|}{\sigma} \right) XY \right]$ ，并利用随机变量

X, Y 之间的独立性假定，有 $R \leq E \left[\exp \left(-\frac{|X-Y|}{\sigma} \right) XY \right] \leq$

$E[XY] = E[X]E[Y]$ 。由文献[2]可知

$$E[|X|^p] = 2^{p+1} \frac{\Gamma \left(\frac{p+1}{2} \right) \Gamma \left(-\frac{p}{\alpha} \right)}{\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-p/2)} \gamma^{p/\alpha}, 0 < p < \alpha \quad (23)$$

其中， $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数， $\Gamma(\cdot) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 。因此，对于定义 1 中设定的稳定分布特征指数 α 的范围 $1 < \alpha \leq 2$ ，有

$$R \leq E[|X|]E[|Y|] = \left[4 \frac{\Gamma(1)\Gamma(-1/\alpha)}{\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-1/2)} \gamma^{1/\alpha} \right]^2 \quad (24)$$

结合式 (22) 和式 (24) 可得

$$-\frac{2\sigma^3}{\pi\gamma} \leq R \leq \left[4 \frac{\Gamma(1)\Gamma(-1/\alpha)}{\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-1/2)} \gamma^{1/\alpha} \right]^2 \quad (25)$$

说明式 (4) 给出的统计量有界，证毕。

参考文献:

[1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
 [2] NIKIAS C L, SHAO M. Signal Processing With Alpha-Stable Distributions and Applications[M]. New York: Wiley, 1995.
 [3] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. The robust covariation-based MUSIC

(ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(7): 1623-1633.
 [4] LIU T H, MENDEL J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8):1605-1613.
 [5] BELKACEMI H, MARCOS S. Robust subspace-based algorithms for joint angle/doppler estimation in non-Gaussian clutter[J]. Signal Processing, 2007, 87:1547-1558.
 [6] LIM C H, SEE S C, ZOUBIR A M, *et al.* Robust adaptive trimming for high-resolution direction finding[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2009, 16(7):580-583.
 [7] CHAN S C, ZOU Y X. A recursive least M-estimate algorithm for robust adaptive filtering in impulsive noise: fast algorithm and convergence performance analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(4):975-991.
 [8] CHAN S C, ZHANG Z G, CHU Y J. A new transform-domain regularized recursive least M-estimate algorithm for a robust linear estimation[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2011, 58(2): 120-124.

作者简介:



张金凤 (1979-)，女，河北定州人，深圳大学讲师，大连理工大学博士生，主要研究方向为非高斯信号分析与处理。



邱天爽 (1954-)，男，江苏海门人，大连理工大学教授、博士生导师，主要研究方向为信号信息处理。

宋爱民 (1978-)，男，辽宁大连人，大连理工大学博士生，主要研究方向为非高斯信号处理。

唐洪 (1977-)，男，四川绵阳人，博士，大连理工大学副教授，主要研究方向为无线定位、生物医学信号处理等。

王娜 (1977-)，女，河北保定人，博士，深圳大学教授，主要研究方向为机器学习、图像处理和模式识别等。